Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2020

Reelle Algebra und Einführung in die o-Minimalität

Blatt 2

Abgabe: 04.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei P ein positiver Bereich auf einem Körper K. Zeige, dass sich das Element 0 durch keine nicht-triviale Summe von Elementen aus P darstellen lässt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

Sei P ein positiver Bereich auf einem Körper K und a ein festes Element von K. Im Polynomring $K[T]$ stelle jedes Polynom nach seiner Taylor-Entwicklung um den Punkt a dar:

$$Q(T) = c_0 + c_1(T-a) + \cdots + c_n(T-a)^n, \text{ mit } c_n \neq 0.$$

Definiere $Q > 0$, falls $c_0 = \cdots = c_{i-1} = 0$ und c_i positiv bezüglich P ist, für ein $0 \leq i \leq n$.

Zeige, dass P sich auf den Körper $K(T)$ rationaler Funktionen in einer Variablen über K derart fortsetzen lässt, dass $a < T$ bezüglich dieser Fortsetzung ist aber kein Konstantes Polynom im offenen Intervall (a, T) liegt. Insbesondere stellt T in dieser Ordnung das Infinitesimal a^+ dar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Sei K ein Körper derart, dass $K(\sqrt{-1})$ keine algebraische Erweiterungen von Grad 2 besitzt. Zeige, dass jede Summe von Quadraten aus K wiederum ein Quadrat im Körper K ist. Insbesondere kann K angeordnet werden, falls die Körpererweiterung $K(\sqrt{-1})$ von K echt ist.
Hinweis: $(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.